

11. évfolyam

I. témakör: Hatvány, gyök, logaritmus

Tört kitevőjű hatványok; exponenciális függvények; exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek; logaritmus fogalma; logaritmus függvények; logaritmus azonosságai; logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek; gyakorlati alkalmazások.

- Írd fel hatványok szorzataként a $\frac{25 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot 7^{-2}}{\sqrt{5^3} \cdot 7^{\frac{5}{3}}}$ kifejezést.
- Rendezd nagyság szerint növekvő sorrendbe az $A = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $B = 32^{\frac{1}{5}}$, $C = \log_{\frac{1}{3}} 9$ számokat.
- Ábrázold az alábbi függvényeket és jellemezd őket a tanult szempontok alapján (értelmezési tartomány, értékkészlet, menet, zérushely, szélsőérték, paritás, periodicitás):
 - $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -2^{x+3} + 1$;
 - $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{x-1} + 4$;
 - $h: [2; 6[\rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$.
- Oldd meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:
 - $\frac{4^{x-1}}{2^x} \cdot 64^{\frac{1}{2}x+4} = 8^{10}$;
 - $3^{x^2+2x-35} = 1$
 - $3 \cdot 4^{x+2} - 2 \cdot 4^{x+1} + 8 \cdot 4^{x-1} = 5 \cdot 4^x + 148$;
 - $49^x + 7 = 8 \cdot 7^x$;
 - $5^x = \frac{1}{5^x} + \frac{24}{5}$.
- Határozd meg az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 5^{x+3} - 4$ függvény zérushelyét két tizedesjegy pontossággal.
- Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:
 - $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2x+5} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{3(x+1)}$;
 - $3^{\frac{2x+3}{4x-1}} < 1$.
- Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán:

11. évfolyam

$$\text{a. } \left. \begin{array}{l} 4 \cdot 3^x + 2^y = 16 \\ 5 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{b. } \left. \begin{array}{l} 5^{xy} = \frac{1}{25} \\ 9^x \cdot 3^y = 27 \end{array} \right\}.$$

8. A logaritmus definíciója alapján határozd meg az alábbi kifejezések értékét:

a. $\log_{81} 3$;

b. $\log_{\sqrt{2}} 4$;

c. $\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

9. Számítsd ki a következő hatványok értékét:

a. $36^{\log_6 2}$;

b. $7^{\log_4 16}$;

c. $3^{\log_3 \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)}$.

10. Számítsd ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$6 \cdot \log_5 6 - \log_5 32 + 4 \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \log_5 10 - 3 \cdot \log_5 9 - \log_5 200.$$

11. Határozd meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetők:

a. $\log_4 (5x-1) + \log_4 (2-x)$;

b. $\lg(x^2 - 7x + 12)$.

12. Adott az $f(x) = \log_2(x-1) + 3$ függvény.

a. Határozd meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető.

b. Írd fel a függvény hozzárendelési szabályát.

c. Ábrázold és jellemezd a függvényt. (Jellemzési szempontok: értelmezési tartomány, értékkészlet, menet, zérushely, szélsőérték, paritás, periodicitás.)

13. Adott az $f(x) = -2 \log_{\frac{1}{3}}(x+4)$ függvény.

a. Határozd meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a függvény értelmezhető.

b. Írd fel a függvény hozzárendelési szabályát.

c. Ábrázold és jellemezd a függvényt. (Jellemzési szempontok: értelmezési tartomány, értékkészlet, menet, zérushely, szélsőérték, paritás, periodicitás.)

11. évfolyam

14. Oldd meg az alábbi egyenleteket, alaphalmaz a valós számok halmaza:

- $\lg(x-9) + \lg(2x-1) = 2;$
- $\log_4(2x-3) - \log_4(x-1) = \log_4 \frac{1}{2};$
- $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5x+8} + \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 126;$
- $\log_3(x^2 - 6x + 8) = 1;$
- $\lg \sqrt{x} + \frac{1}{2} = \lg^2 x.$

15. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

- $\log_4(x-2) < 0;$
- $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 + x - 30) < 0.$

16. Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán:

- $$\left. \begin{aligned} 5 \cdot \lg x + \lg y &= 7 \\ 2 \cdot \lg x - 3 \cdot \lg y &= -4 \end{aligned} \right\};$$
- $$\left. \begin{aligned} \lg y + \lg(x-3) &= \lg 6 \\ \log_2(x-y) &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

17. Kisebb mennyiségű cukor oldódása nagy mennyiségű vízben közelítőleg az $M(t) = M_0 \cdot a^t$ formula szerint, tehát időben exponenciálisan zajlik ($0 < a < 1$; a cukor vízbe kerülésétől percben mért időt jelöli a t ; $M(t)$ a t időpontig fel nem oldódott cukor mennyisége; M_0 pedig a teljes cukor mennyisége, amit a vízbe tettünk). Legyen $a = 0,95$.

- Mennyi idő múlva oldódik fel a cukormennyiség fele?
- Ha a 99,9%-os oldódást már „lényegében teljesnek” nevezzük, akkor mikorra oldódik fel lényegében teljesen a cukor

18. Gazdaságkutatók szerint Közép- és Kelet-Európa „átmeneti” országainak átlagos 1 főre jutó GDP-je $n = \frac{\lg F - \lg f}{\lg R - \lg R}$ év alatt éri utol a fejlett országokét, ahol F és f a fejlett,

illetve átmeneti országok jelenlegi 1 főre jutó GDP-jét jelöli. 1992-ben a fejlett országokban a mutató (átlagosan) 17 444 \$, az átmeneti országokban pedig 4 627 \$ volt. R és r azt mutatja meg, hányszorosára növekszik egy év alatt a fejlett, illetve fejlődő országok egy főre jutó GDP-je. A fejlett országokban az egy főre jutó GDP éves növekedési üteme 2% (vagyis $R = 1,02$). Hány százalékos éves növekedést kellett volna elérni az átmeneti országokban, hogy az utolérés 20 év alatt bekövetkezzen?

11. évfolyam

II. témakör: Trigonometria

Forgásszögek szögfüggvényei, tulajdonságai; összefüggések; visszakeresések; trigonometrikus függvények ábrázolása, jellemzése; két vektor skaláris szorzata, skaláris szorzat a koordinátarendszerben; szinusztétel, koszinusztétel; trigonometrikus egyenletek.

19. Határozd meg azokat a forgásszögeket, amelyekre igaz, hogy $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

20. Add meg azokat a szögeket, amelyekre $[0; 2\pi]$ intervallumon igaz, hogy $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

21. Van-e olyan forgásszög, amelyre $\operatorname{tg} \alpha = 5$? Ha igen, akkor add meg a szöget, ha pedig nem, akkor indokold meg miért nincs.

22. Az alábbi függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Add értékkészletüket:

- $f(x) = 3 \sin x$;
- $g(x) = \cos(3x)$;
- $h(x) = 2 \cos x - 1$.

23. Ábrázold és jellemzed az alábbi függvényeket:

- $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;
- $g: [-\pi; 2\pi[\rightarrow \mathbf{R}, \quad g(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$;
- $h: \mathbf{R} \setminus \rightarrow \mathbf{R}, \quad h(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$.

24. Számítsd ki a két vektor skaláris szorzatát:

- $|\vec{a}| = 5, \quad |\vec{b}| = 8, \quad \alpha = 150^\circ$;
- $\vec{p}(-2; 3), \quad \vec{q}(6; 1)$.

25. Egy háromszög szögei közül a középső másfélszer akkora, mint a legkisebb, és harmadakkora, mint a legkisebb és a legnagyobb összege. A legrövidebb oldal hossza $\sqrt{2}$ egység.

- Mekkorák a háromszög szögei?
- Számítsd ki a háromszög hiányzó oldalainak hosszát!
- Add meg a háromszög területét!

11. évfolyam

26. Háromszög alakú kertünket be szeretnénk keríteni dróthálóval. Két oldalának hossza 20 méter és 28 méter, valamint az általuk bezárt szög $72^\circ 38'$.
- Hány négyzetméter dróthálóra lesz szükségünk, ha azt akarjuk, hogy a kerítés 185 cm magas legyen?
 - Mennyibe kerül a kerítés, ha 300 Ft-ba kerül méterenként és a keletkező hulladéokra és illesztésekre tekintettel a szükségesnél 15%-kal többet vásárolunk.



27. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a. $2 \cdot \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0;$

b. $\operatorname{tg}^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3};$

c. $\cos\left(16x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right);$

d. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0;$

e. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2;$

f. $1 - \sin x = 2\cos^2 x.$

11. évfolyam

III. témakör: Koordinátageometria

Műveletek koordinátáikkal adott vektorokkal; vektor hossza, két pont távolsága; két vektor hajlásszöge; háromszögek kerülete, területe; szakasz osztópontjai, háromszögek súlypontja; egyenest meghatározó adatok a koordináta-rendszerben, összefüggéseik; egyenes egyenlete; két egyenes metszéspontja, távolsága, hajlásszöge, háromszögek nevezetes vonalainak egyenletei; kör egyenlete, háromszög köré írt köre; kör és egyenes kölcsönös helyzete, kör érintői.

28. Mekkora szöget zárnak be egymással az alábbi vektorok:

- $\vec{a}(6;-2)$ és $\vec{b}(3;9)$;
- $\vec{a}(6;-2)$ és $\vec{c}(4;3)$?

29. Egy háromszög A illetve B csúcsának helyvektorai: $\vec{a}(1;4)$ és $\vec{b}(3;-3)$. A háromszög C csúcsába mutató helyvektorról tudjuk, hogy $\vec{c} = 2\vec{b} + \vec{a}$.

- Számítsd ki a C csúcs koordinátáit.
- Számítsd ki a háromszög kerületét, és területét.

30. Egy paralelogramma két csúcsa $A(8;2)$, $B(1;6)$, átlóinak metszéspontja $M(4;-2)$.

- Írd fel az $\vec{AB}$ vektor koordinátáit.
- Határozd meg a hiányzó csúcsok koordinátáit.
- Számítsd ki a paralelogramma szögeit.

31. Egy háromszög két csúcsa $A(-2;-3)$, $B(1;8)$, súlypontjának koordinátái $S(4;1)$.

- Számítsd ki a harmadik csúcs koordinátáit.
- Írd fel az A csúcsból induló súlyvonal egyenletét.
- Számítsd ki az az A csúcsból induló súlyvonal és a BC oldal metszéspontjának koordinátáit.

32.

- Határozd meg az $e: -x + 7y = 5$ egyenletű egyenesnek azt a pontját, amely egyenlő távolságra van a $P(1;-2)$ és a $Q(5;-1)$ pontoktól.
- Milyen távol van a P pont az e egyenestől?

33. Határozd meg a $k: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$ egyenletű körnek azt a pontját, amely egyenlő távolságra van az $A(4;1)$ és $B(6;-3)$ pontoktól.

34. Adott az $A(7;9)$, $B(0;2)$ és $C(4;-6)$ háromszög.

- Számítsd ki legnagyobb szögének nagyságát.
- Írd fel a háromszög köré írt kör egyenletét.

35. Adott az $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$ egyenletű kör.

- Határozd meg a kör középpontjának a koordinátáit és a kör sugarát.
- Vizsgáld meg, hogy a $P(5;-1)$ illetve a $Q(7;4)$ pontok illeszkednek-e a körre?
- Írd fel a körhöz a $P(5;-1)$ pontban húzott érintő egyenletét.

11. évfolyam

IV. témakör: Kombinatorika és valószínűség számítás

Összeszámlálási alapeladatok (permutációk ismétléssel és ismétlés nélkül, variációk ismétléssel és ismétlés nélkül, ismétlés nélküli kombinációk), gráfok, események, műveletek eseményekkel, klasszikus modell, komplementer esemény valószínűsége, visszatevéses mintavétel, visszatevés nélküli mintavétel.

36. Anna, Bea, Csilla, Dóra és Eszter együtt mentek moziba. Mozijegyük egymás mellé szolt.
 - a. Hányféleképpen ülhetnek le egymás melletti öt székre a lányok?
 - b. Útközben Csilla és Dóra összevesztek. Hányféle sorrendben ülhetnek le, ha Csilla és Dóra nem ültek egymás mellé?
 - c. A mozi után beültek egy cukrászdába egy kerek asztal köré. Hányféleképpen ülhetnek le, ha mozi után Csilla és Dóra kibékültek?
37. A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával számokat készítünk. Hányféle
 - a. hétjegyű szám készíthető, ha a számjegyeket többször is felhasználhatjuk;
 - b. hétjegyű szám készíthető, ha minden számjegy legfeljebb egyszer szerepelhet;
 - c. négyjegyű páratlan szám készíthető, ha minden számjegy legfeljebb egyszer szerepelhet;
 - d. ötjegyű páros szám készíthető, ha a számjegyeket többször is fel lehet használni;
 - e. ötjegyű, négyvel osztható szám készíthető, ha minden számjegy legfeljebb egyszer szerepelhet?
38. A 32 lapos magyar kártya csomagból véletlenszerűen kihúzzunk öt lapot. Hány olyan húzás lehetséges, amelyben
 - a. a kihúzott lapok között pontosan kettő zöld van;
 - b. nincs benne a piros ász;
 - c. van piros?
39. Egy teniszversenyen nyolc fő vett részt: András, Béla, Csaba, Dani, Elemér, Feri, Géza és Huba. Eddig András játszott már Danival és Gézával. Béla játszott Csabával, Ferivel és Hubával. Feri játszott már Edével is. Géza túl van már a Danival való mérkőzésen.
 - a. Szemléltesd gráffal a lejátszott mérkőzéseket.
 - b. Összefüggő-e a gráf? Van-e neki izolált pontja?
 - c. Hány mérkőzés van még hátra, ha mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszik?
 - d. Hányféleképpen alakulhatott a verseny végeredménye, ha tudjuk, hogy Dani az első két hely valamelyikén végzett és Elemér nem lett utolsó?
40. Egy számítógép monitorán egy számegyenes $[-5;15]$ intervalluma látható. Véletlenszerűen felvillannak e szakaszon egyes pontok. Jelentse A azt az eseményt, hogy a felvillanó pont a $]0;5[$ intervallumba esik, B pedig azt, hogy a $]3;10[$ -be. Adjuk meg, hogy mely intervallumban lehet a felvillanó pont, hogy a következő események teljesüljenek:
 - a. $A \cdot B$;
 - b. $A + B$;
 - c. $A - B$.

11. évfolyam

41. András feldobott egy dobókockát 100-szor, és lejegyezte a dobások eredményeit: 1-est 15-ször; 2-est 17-szer; 3-ast 15-ször; 4-est 18-szor; 5-öst 19-szer; 6-ost 16-szor dobott.

Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott szám prím. Határozd meg az A esemény gyakoriságát, relatív gyakoriságát András kísérletében.



42. Most díszítjük a karácsonyfánkat. 24 darab marcipános szaloncukrot teszünk majd fel rá. Hány darab, az előbbiekkal azonos színű csomagolópapírban levő kókuszos szaloncukrot tegyünk még fel a fára, hogy annak a valószínűsége, hogy kókuszosat választunk a fáról, $\frac{2}{5}$ legyen?

43. Egy dobókockát feldobunk 4-szer egymás után. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer 6-ost dobunk?

44. Gabi és Zsuzsi a következő szabályok szerint játszanak: feldobnak egy-egy dobókockát és a dobott számokat összeszorozzák. Gabi kap egy pontot, ha a szorzat osztható 5-tel vagy páratlan, Zsuzsi kap egy pontot, ha a szorzat legfeljebb 6 vagy legalább 24.

- Milyen valószínűséggel kap pontot Gabi?
- Milyen valószínűséggel kap pontot Zsuzsi?
- Milyen valószínűséggel kapnak mindketten egy pontot?
- Milyen valószínűséggel kap valamelyikük egy pontot (esetleg mindketten)?

45. Egy dobozban 12 fehér és 36 kék golyó van, amelyek tapintással nem különböztethetők meg. Visszatevésees mintavétellel kihúzzunk 7 db-ot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzottak között legalább 2 fehér van?

46. Egy rejtvenyűségba 1217 helyes megfejtés érkezett egy rejtvenyre, 532 vidékről, a többi Budapestről. Hét ajándékot sorsolnak ki a nyertesek között. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

- minden nyertes budapesti;
- pontosan kettő nyertes budapesti;
- legalább egy nyertes vidéki?

		1				
		2		3		4
			5		6	7
5			1	4		
	7					2
				7	8	9
8	7			9		
4				6	3	
					5	